**REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS NA FORMA DO ESPAÇO DOS ESTADOS**

1. **Espaço dos estados**
   * Representação da dinâmica de um sistema de ordem *n* usando *n* equações diferenciais de primeira ordem.
   * Sistema é escrito em função de:
     + 1. Um vetor de dimensão *n*x1 ⇒ chamado vetor de estados;
       2. Um vetor de dimensão *m*x1 ⇒ chamado vetor de entradas;
       3. Um vetor de dimensão *p*x1 ⇒ chamado vetor de saídas.

* Precisa converter a equação diferencial de ordem *n* para *n* equações diferenciais de 1ª ordem.

**Exemplo:** Sistema massa-mola-amortecedor:

Equação diferencial de 2ª ordem:



Estados:



Substituindo:



* Equações de estado:



* Definindo o vetor de estados ⇒  (dimensão 2x1, *n* = 2).
  + Definindo a entrada ⇒  (no caso a entrada é um escalar e não um vetor, *m* = 1).
* Equações de estado na forma matricial:



* Definido uma saída para o sistema (valor medido por um sensor) ⇒ *x*(*t*) (no caso a saída é um escalar e não um vetor, *p* = 1).

Equação da saída na forma matricial ⇒ 

1. **Forma geral do espaço dos estados**

* Qualquer sistema dinâmico linear pode ser escrito na forma geral:

 → equação dos estados

 → equação da saída

onde

 - vetor de estados *Rn* (dimensão *n*x1);

 - vetor de entrada *Rm* (dimensão *m*x1);

 - vetor de saída *Rp* (dimensão *p*x1);

 - matriz dos estados (*n*x*n*);

 - matriz de entrada (*n*x*m*);

 - matriz de saída ou matriz dos sensores (*p*x*n*);

 - matriz de alimentação direta (*p*x*m*).

* Os estados resumem os efeitos de entradas passadas nas saídas futuras ⇒ são memórias do sistema.
* Estados estão associados com variáveis armazenadoras de energia no sistema.
* No sistema massa-mola-amortecedor ⇒

armazenamento de energia potencial → posição, *x*(*t*);

armazenamento de energia cinética → velocidade, *v*(*t*).

* Saídas são variáveis associadas com sensores ⇒ são variáveis medidas.
* Entradas são variáveis que alteram as condições de energia do sistema.
* A dinâmica de um sistema pode ser variante ou invariante no tempo:
* Sistema linear **invariante** no tempo ⇒ matrizes **A**, **B**, **C** e **D** são constantes;
* Sistema linear **variante** no tempo ⇒ matrizes **A**(*t*), **B**(*t*), **C**(*t*) e **D**(*t*) variam no tempo.
* Sistemas podem ser:
* **SISO** ⇒ *single* (uma) entrada, *single* (uma) saída;
* **MIMO** ⇒ múltiplas entradas, múltiplas saídas.
* Usualmente lidamos com Sistemas Lineares Invariantes no tempo (LTI) ⇒ relação entre saída (*y*) e entrada (*u*) não depende diretamento do tempo.



* Nesse caso as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** são constantes.
* Saídas futuras dependem somente do estado presente e entradas futuras.
* Não existe somente um conjunto de estados para um mesmo sistema ⇒ existem muitas possibilidades para o vetor de estados de um sistema.

1. **Representação de sistemas por diagrama de blocos**

* No domínio do tempo tem-se:





**C**

**A**

**B**







+

+

**D**

+

+



* No domìnio da Transformada de Laplace tem-se:

Transformada de Laplace

 





**C**

**A**

**B**







+

+

**D**

+

+



1. **Exercícios**
   * + 1. Dado um motor elétrico de corrente contínua controlado pela armadura. O circuito elétrico do motor é modelado com sendo uma fonte de tensão em serie com um resistor e um resistor indutor.

+

*V*(t)

−

*L*

*R*

*i*(*t*)

*θ*

Motor

*τcarga*

Carga

Atrito

Assumindo que o eixo do motor é rígido e que existe atrito viscoso nos mancais do eixo, o modelo desse sistema é representado pelas seguintes equações diferenciais:



onde *J* é a inércia do rotor do motor e da carga fixa ao eixo do motor, *b* é a constante de atrito viscoso nos mancais, *KT* é a constante de torque do motor, *KV* é a constante de velocidade do motor. Nota-se que o termo *KTi* representa o torque aplicado pelo motor e o termo  representa a tensão induzida no circuito elétrico pelo movimento da bobina elétrica dentro de um campo magnético. Pede-se:

1. Defina o vetor de estados, o vetor de entradas, o vetor de saídas e o vetor de perturbações do sistema.
2. Coloque o sistema na forma do espaço dos estados.
3. Represente o sistema na forma de diagrama de blocos.
   * + 1. Dado o circuito elétrico composto por uma fonte de tensão em série com um resistor, um capacitor e um indutor

*C*

*L*

*R*

*i*(*t*)

+

*V*(t)

−

O modelo dinâmico desse circuito é representado pela seguinte equação diferencial-integral.



onde *i* é a corrente elétrica, *V* é a tensão imposta pela fonte, *L* é a indutância, *R* é a resistência e *C* é a capacitância. Pede-se:

1. Defina o vetor de estados, o vetor de entradas, o vetor de saídas e o vetor de perturbações do sistema.
2. Coloque o sistema na forma do espaço dos estados.
3. Represente o sistema na forma de diagrama de blocos.
   * + 1. Considere o diagrama de blocos abaixo que representa a dinâmica linearizada de um sistema dinâmico. Sabendo que a saída do sistema é o estado *x*1, obtenha a representação do sistema no espaço dos estados.

+−

+

*x*1

1

2

+

−



3

1



*u*

*y*





*x*2

* + - 1. Dado o sistema da figura abaixo:

*m*1

*m*2



*k*1

*k*2

*k*3

*d*

*F*2

*F*1

O ambiente age sobre as massas com uma força de atrito que pode ser modelada por *Fj*(*t*) = *bjvj*(*t*), *j* = 1, 2. Assim, as equações diferenciais que representam a dinâmica do sistema são as seguintes:





As massas 1 e 2 são iguais a 2kg, as constantes das molas 1 e 3 são iguais a 50N/m, a constante da mola 2 é igual a 75N/m. O coeficiente de atrito viscoso entre as massas e o chão é igual a 5N/m/s.

As forças *F*1(*t*) e *F*2(*t*) podem ser controladas por um agente externo conhecido, portanto, são consideradas como entradas do sistema. A posição da ponta direita da mola 3 tem um deslocamento *d*(*t*) desconhecido e sobre o qual não se tem controle, portanto, é considerada como sendo uma perturbação. As posições das massas 1 e 2, *x*1(*t*) e *x*2(*t*) respectivamente são medidas, portanto, são consideradas as saídas do sistema.

Pede-se:

1. Defina o vetor de estados, o vetor de entradas, o vetor de saídas e o vetor de perturbações do sistema.
2. Coloque o sistema na forma do espaço dos estados.
3. Desenvolva um modelo do sistema usando o Simulink.
4. Simule o transitório gerado no sistema para uma condição inicial na qual as massas 1 e 2 estão deslocadas da posição de equilíbrio de −0,1m e 0,1m respectivamente.
5. Simule o transitório gerado no sistema para o vetor de entrada variando na forma de degrau de forma que o valor inicial das forças antes do degrau é zero e após o degrau são *f*1 = 100N e *f*2 = −150N.

* Principais comandos do Matlab a serem utilizados:
  + ss;
  + simulink;
  + initial;
  + lsim.